Zoé

leçons : 159 203.

Caractérisation des morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

Soit (X, d) un espace métrique compact. Les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont l'application nulle et les morphismes d'évaluation $f \mapsto f(s)$ pour $s \in X$.

Étape 1 : Les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sont les $\mathfrak{I}_s := \{ f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}),\ f(s) = 0 \}$ pour $s \in X$

On vérifie aisément que les $(\mathfrak{I}_s)_{s \in X}$ sont des idéaux.

- Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Supposons $\forall s \in S : \exists f_s \in \mathfrak{I},\ f_s(s) \neq 0$

Alors, pour tout $s \in S$, par continuité des f_s : il existe un voisinage ouvert O_s de s tel que f_s ne s'annule pas sur O_s.

Or comme $\forall s \in X : s \in O_s$:

$$X = \bigcup_{s \in X} O_s \quad ;$$

et par compacité de (X, d), il existe une partie finie $F \subset X$ telle que :

$$X = \bigcup_{s \in F} O_s$$

Posons $f = \sum_{s \in F} f_s^2 \in \mathcal{J}$

Cette fonction est strictement positive sur les $(\mathcal{O}_s)_{s \in F}$ donc aussi sur X, donc en particulier elle est inversible (dans l'anneau $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$).
Or $f \in \mathcal{J}$, donc $\mathcal{J} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

On a montré par l'absurde que pour tout idéal $\mathcal{J} \neq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, il existe $s \in X$ tel que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_s$.

• De plus, si $s, s' \in X$ et $\mathcal{J}_s \subset \mathcal{J}_{s'}$, alors $s = s'$ et $\mathcal{J}_s = \mathcal{J}_{s'}$. (*)

Finalement, les $(\mathcal{J}_s)_{s \in X}$ sont précisément les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Étape 2 | Les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ non nuls sont les morphismes d'évaluation $f \longmapsto f(s)$ pour $s \in X$

• Soit φ un morphisme d'algèbre non nul.
φ est un morphisme d'anneau, donc
(et $\varphi \neq 0$) $\underline{\operatorname{Ker} \varphi \subset \mathcal{J}_s}$ pour un certain $s \in X$.
Mais φ est de plus une forme linéaire, donc $\underline{\operatorname{Ker} \varphi \text{ est un hyperplan de } \mathcal{C}(X, \mathbb{R})}$

(*) En effet : si $\mathcal{J}_s \subset \mathcal{J}_{s'}$: $\underbrace{x \mapsto d(x, s)}_{\text{continue}} \in \mathcal{J}_s \subset \mathcal{J}_{s'}$ donc $d(s, s') = 0$ donc $s = s'$

On $ev_s : f \longmapsto f(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \mathbb{R})$

et $\varphi, ev_s \neq 0$

s'annule sur $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (car $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathcal{I}_s$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $ev_s = \lambda \varphi$

grâce au

$\varphi = \lambda ev_s$

lemme L'ensemble E des formes linéaires s'annulant sur un hyperplan H forme une droite du dual

En effet, si $\alpha, \beta \in E$ et $\beta \neq 0$,

(Dessine par définition d'hyperplan) et si D est une droite supplémentaire de H

la forme $\alpha - \frac{\alpha(f)}{\beta(f)} \beta$ pour $f \in D \setminus \{0\}$

est nulle sur H et sur $D = \langle f \rangle$

donc est nulle, donc α et β sont colinéaires

On montre ensuite que $\lambda = 1$ par des propriétés des morphismes d'algèbres.

En effet, si $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{I}_s$:

$$\lambda\, ev_s(f^2) = \lambda^2 \varphi(f^2) = \lambda^2 \varphi(f)^2 = (\lambda \varphi(f))^2$$
$$= ev_s(f)^2$$

soit $\lambda\, f(s)^2 = f(s)^2$

or $f(s) \neq 0$ car $f \notin \mathcal{I}_s$

donc $\lambda = 1$ et $\underline{\varphi = ev_s}$

Les morphismes d'algèbres non nuls sont donc bien les $(ev_s)_{s \in X}$ $\square$